

24/4/14

Ορθοκανονικές βάσεις και η μέθοδος Gram-Schmidt
($E, \langle \cdot, \cdot \rangle$) ευκλ. χώρος

Η βάση $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ λέγεται ορθογώνια αν ισχύει
 $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$

Η βάση $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ λέγεται ορθοκανονική αν ισχύει
 $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

V υποχώρος του E

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ βάση του χώρου V
 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ ορθ. βάση του V
 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ ορθοκανονική βάση του V

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ βάση του V
 $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$
 $\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1$
 $a_i \neq 0 \Rightarrow \langle a_i, a_i \rangle \neq 0$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\langle \vec{a}_3, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 - \frac{\langle \vec{a}_3, \vec{b}_2 \rangle}{\langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle} \vec{b}_2$$

$$\vec{b}_n = \vec{a}_n - \frac{\langle \vec{a}_n, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 - \frac{\langle \vec{a}_n, \vec{b}_2 \rangle}{\langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle} \vec{b}_2 - \dots - \frac{\langle \vec{a}_n, \vec{b}_{n-1} \rangle}{\langle \vec{b}_{n-1}, \vec{b}_{n-1} \rangle} \vec{b}_{n-1}$$

(1)

$$\vec{y}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|}$$

$$\vec{y}_2 = \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|}$$

$$\vec{y}_n = \frac{\vec{b}_n}{\|\vec{b}_n\|}$$

$\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ ορθοκανονική

$$\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle = \langle \vec{b}_1, \vec{a}_2 - \frac{\langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 \rangle =$$

$$= \langle \vec{b}_1, \vec{a}_2 \rangle + \langle \vec{b}_1, -\frac{\langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 \rangle$$

$$= \langle \vec{b}_1, \vec{a}_2 \rangle - \frac{\langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle \langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} = 0$$

Παράδειγμα εφαρμογής μεθόδου Gram-Schmidt

$$\mathbb{R}^{3 \times 1} \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

με το κινητό
ερωτ. πρόβλεψ

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\langle \vec{a}_3, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 - \frac{\langle \vec{a}_3, \vec{b}_2 \rangle}{\langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle} \vec{b}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ортогоналы

$$\vec{y}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_2 = \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_3 = \frac{\vec{b}_3}{\|\vec{b}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3)

(4)

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα: Έστω $\mathbb{R}_2[X]$ ο διαν. χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2 με εσωτερικό γινόμενο $\langle f(x), g(x) \rangle =$

$$= \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$\vec{a}_1 = 1, \quad \vec{a}_2 = x, \quad \vec{a}_3 = x^2$$

1) Βασ.

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = 1$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x - \frac{\int_0^1 x \cdot 1 dx}{\int_0^1 1 dx} \cdot 1 =$$

$$= x - \frac{\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1}{\left[x \right]_0^1} \cdot 1 = x - \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\langle \vec{a}_3, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 - \frac{\langle \vec{a}_3, \vec{b}_2 \rangle}{\langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle} \vec{b}_2 =$$

$$= x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{\langle x^2, x - \frac{1}{2} \rangle}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle} \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}\vec{b}_1 &= 1 \\ \vec{b}_2 &= x - \frac{1}{2} \\ \vec{b}_3 &= x^2 - x + \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 - \frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 1 dx} - \frac{\int_0^1 x^2 (x - \frac{1}{2}) dx}{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx} (x - \frac{1}{2})}{6} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$\vec{y}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = 1$$

ορθοκανονική βάση

$$\vec{y}_2 = \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|} = \sqrt{12} (x - \frac{1}{2})$$

$$\vec{y}_3 = \frac{\vec{b}_3}{\|\vec{b}_3\|} = \sqrt{180} (x^2 - x + \frac{1}{6})$$

$$\vec{x} \in (E, \langle, \rangle)$$

$\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ ΟΚΒ (Ορθοκανονική βάση)

$$\vec{x} = x_1 \vec{y}_1 + x_2 \vec{y}_2 + \dots + x_n \vec{y}_n$$

$$x_i = \langle x, y_i \rangle$$

Ans: $\langle \vec{x}, \vec{f}_i \rangle = \langle x_1 \vec{f}_1 + x_2 \vec{f}_2 + \dots + x_n \vec{f}_n, \vec{f}_i \rangle$

$$= x_1 \langle \vec{f}_1, \vec{f}_i \rangle + x_2 \langle \vec{f}_2, \vec{f}_i \rangle + \dots + x_i \langle \vec{f}_i, \vec{f}_i \rangle +$$

$$x_n \langle \vec{f}_n, \vec{f}_i \rangle = x_i$$

$\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ O.K.B. zu $(E, \langle, \rangle)$

$$\vec{x} = x_1 \vec{f}_1 + x_2 \vec{f}_2 + \dots + x_n \vec{f}_n$$

$$\vec{y} = y_1 \vec{f}_1 + y_2 \vec{f}_2 + \dots + y_n \vec{f}_n$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle x_1 \vec{f}_1 + x_2 \vec{f}_2 + \dots + x_n \vec{f}_n, y_1 \vec{f}_1 + y_2 \vec{f}_2 + \dots + y_n \vec{f}_n \rangle$$

$$= x_1 \langle \vec{f}_1, y_1 \vec{f}_1 + y_2 \vec{f}_2 + \dots + y_n \vec{f}_n \rangle + x_2 \langle \vec{f}_2, y_1 \vec{f}_1 + y_2 \vec{f}_2 + \dots + y_n \vec{f}_n \rangle +$$

$$x_n \langle \vec{f}_n, y_1 \vec{f}_1 + y_2 \vec{f}_2 + \dots + y_n \vec{f}_n \rangle =$$

$$= x_1 y_1 \langle \vec{f}_1, \vec{f}_1 \rangle + x_1 y_2 \langle \vec{f}_1, \vec{f}_2 \rangle + \dots + x_1 y_n \langle \vec{f}_1, \vec{f}_n \rangle +$$

$$+ x_2 y_1 \langle \vec{f}_2, \vec{f}_1 \rangle + x_2 y_2 \langle \vec{f}_2, \vec{f}_2 \rangle + \dots + x_2 y_n \langle \vec{f}_2, \vec{f}_n \rangle +$$

$$+ x_n y_1 \langle \vec{f}_n, \vec{f}_1 \rangle + x_n y_2 \langle \vec{f}_n, \vec{f}_2 \rangle + \dots + x_n y_n \langle \vec{f}_n, \vec{f}_n \rangle$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Παράδειγμα $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$
 $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$

Έστω $V = \langle A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Βρείτε μια ΟΚΒ του V

Λύση: $B_1 = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$B_2 = A_2 - \frac{\langle A_2, B_1 \rangle}{\langle B_1, B_1 \rangle} B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\text{tr}(B_1^t A_2)}{\text{tr}(B_1^t B_1)} B_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)}{\text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2+2}{2+2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_1, B_2 \text{ ορθογώνια βάση}$$

$$\Gamma_1 = \frac{B_1}{\|B_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\text{tr} \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

||
 Γ_1

$$\Gamma_2 = \frac{B_2}{\|B_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{\text{tr} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{\text{tr} \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}}} =$$

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ασκηση: 1) $\vec{a}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (0, 1, -2)$

Βρείτε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ με το βέλος εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbb{R}[x] \quad \vec{a}_1 = x+1, \quad \vec{a}_2 = x-1$$

Βρείτε ΟΚΒ $(\mathbb{R}[x], \int_0^1 f(x)g(x)dx)$

2) $(\mathbb{R}^{3 \times 3}, \langle A, B \rangle)$

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A) \quad \text{Βρείτε μια ΟΚΒ του χώρου}$$

$$V = \langle A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

οπi γαρ $e^A = I_m + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$
 $m \times m$ πίνακας

Εστω $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$

$$e^A = I_m + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \lambda_2^2 & \\ & & \lambda_m^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & & \\ & \lambda_2^3 & \\ & & \lambda_m^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{2!} + \frac{\lambda_1^3}{3!} + \dots & 0 & \\ 0 & 1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_2^2}{2!} + \dots & \\ & & 1 + \lambda_m + \frac{\lambda_m^2}{2!} + \frac{\lambda_m^3}{3!} + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & & e^{\lambda_m} \end{pmatrix}$$

(Ασκ-5 / Φυλλάδιο #4 εν/α)